1.2.10 Absolutní hodnota I

Předpoklady: 010205

$|2| = 2$

$|0| = 0$ $\Rightarrow$ S nezápornými čísly absolutní hodnota nic nedělá.

$|\pi| = \pi$

$|-2| = 2$

$\left|-\frac{3}{5}\right| = \frac{3}{5}$ $\Rightarrow$ Záporná čísla absolutní hodnota změní na kladná (vynásobí je –1).

$\left|-\sqrt{3}\right| = \sqrt{3}$

Absolutní hodnota je zabiják mínusů.

Př. 1: Sestav definici absolutní hodnoty reálného čísla *a*.

Definice:
Absolutní hodnotu $|a|$ reálného čísla *a* definujeme takto:
Je-li $a \geq 0$, pak $|a| = a$ (s nezápornými nic nedělá).
Je-li $a < 0$, pak $|a| = -a$ (záporným změní znaménko na plus)

Definice se liší od definic pro odmocniny. Nemáme jeden stejný postup pro všechna čísla, ze kterých je možné absolutní hodnotu udělat, ale dva různé postupy pro dva druhy čísel $\Rightarrow$ nebude možné odstraňovat jednoduše absolutní hodnotu, když nebudeme vědět, jaké je znaménko čísla uvnitř.

Pedagogická poznámka: Nedá se očekávat, že by žáci dokázali definici sestavit, spíše můžete ozkoušet několik špatných definic. Samotné pojetí definice totiž neodpovídá žákovským očekáváním. Snažím se řešení příliš neprotahovat a poměrně brzo nechávám třídě definici opsat. Dá se očekávat, že někdo z odvážnějších se ozve, že v druhé řádce je chyba (kvůli mínusu). V takovém případě ihned následuje diskuse jinak iniciovaná v příkladech 2 a 3.

Poznámka: Definici absolutní hodnoty nemusíme vnímat jenom jako definici, ale také jako návod na její odstranění $\Rightarrow$ umožňuje nám přepsat výraz s absolutní hodnotou tak, aby se v něm už dále nevyskytovala (bohužel pouze za cenu rozdvojení postupu).

Př. 2: Vysvětli, proč přes zápis: Je-li $a < 0$, pak $|a| = -a$, nevyjde pro záporná čísla absolutní hodnota záporné číslo (i když v zápisu je před *a* mínus).

Mínus před *a* neříká nic o znaménku čísla, říká, že hodnotu *a* násobíme (-1), tím změníme znaménko čísla *a* a pokud je *a* záporné, získáme tím kladné číslo.

Př. 3: Ověř dosazením, že pro záporná čísla a platí $|a| = -a$.

Například $a = -3$.
$|a| = |-3| = 3$
$-a = -(-3) = 3$

Pedagogická poznámka: Předchozí příklady vypadají zbytečně, ale většina žáků si doopravdy myslí, že jakmile před něco napíšou mínus, je to záporné. Je potřeba je neustále vyvádět z omylu, a dokazovat, že u proměnných záleží na tom, jaké je znaménko čísla, které proměnná obsahuje.

Důsledky:
- $|a|$ je vždy nezáporné číslo,
- platí $\sqrt{a^2} = |a|$ (kladná hodnota řeší problém se znaménkem, které se při umocňování ztratí),
- $\begin{matrix} |2| = |-2| \\ |a| = |-a| \end{matrix}$ $\Rightarrow$ absolutní hodnoty opačných čísel se rovnají.

Pedagogická poznámka: Zadání následujícího příkladů píšu na tabuli. V počítačovém zápisu jsou jednotlivé úrovně absolutních hodnot špatně rozlišitelné.

Př. 4: Spočti.
a) $\big|-2+|-3|\big| =$
b) $\big|-5+(-2)\cdot|2-3|\big|-8 =$
c) $\big|2-|3|+4\cdot|-2|\big|-\big|3\cdot(-2)\big| =$

a) $\big|-2+|-3|\big| = |-2+3| = |1| = 1$
b) $\big|-5+(-2)\cdot|2-3|\big|-8 = |-5+(-2)\cdot 1|-8 = |-5-2|-8 = |-7|-8 = 7-8 = -1$
c) $\big|2-|3|+4\cdot|-2|\big|-\big|3\cdot(-2)\big| = |2-3+4\cdot 2|-|-6| = |7|-|-6| = 7-6 = 1$

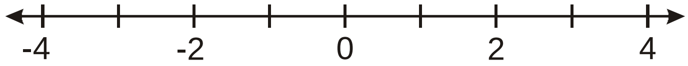
V bodě b) vyšlo záporné číslo, i když výraz obsahoval absolutní hodnotu, protože navíc obsahoval i odčítání 8 $\Rightarrow$ absolutní hodnota s jistotou zajistí nezápornost výrazu, pouze když je poslední operací v pořadí.

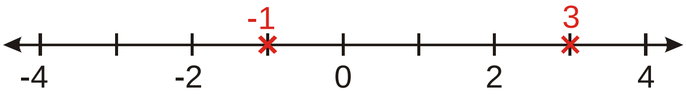
Pedagogická poznámka: Předchozí připomínka není úplně zbytečná. Například při kreslení grafů začnou někteří studenti podvědomě aplikovat pravidlo, že všechno, co obsahuje absolutní hodnotu, nemůže být nikdy záporné.

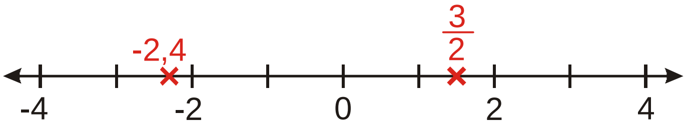
Pedagogická poznámka: Někteří žáci přestávají u absolutních hodnot respektovat přednost násobení před sčítáním. Opět zdůrazňuji (jako u odmocnin), že i absolutní hodnota je jenom číslo a není důvod ke zvláštnímu chování.

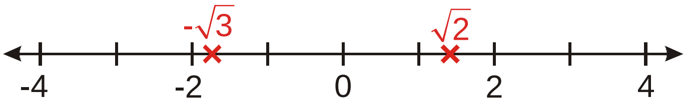
Pedagogická poznámka: Následuje opakování práce s číselnou osou (v hodině o reálných číslech na ně nezbývá čas), pro některé žáky je nutné.

Př. 5: Obkresli rukou (bez použití pravítka) do sešitu obrázek číselné osy. Dokresli do obrázku obrazy těchto čísel: $3; -1; \frac{3}{2}; -2,4; \sqrt{2}; -\sqrt{3}$.

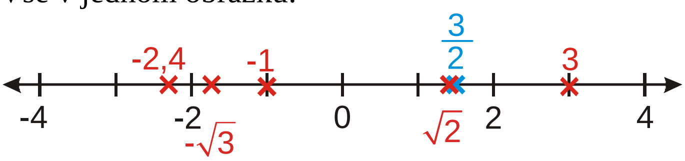








Vše v jednom obrázku:



Trochu obtížnější je zobrazování většího počtu čísel najednou. Například všechna čísla *x*, pro která platí $-1 < x \le 3$ zakreslíme takto:

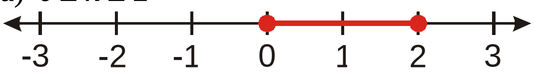
Př. 6: Jakým způsobem souvisí různé druhy koleček použité k předchozímu zobrazení s tvarem nerovnosti?

Plným kolečkem je označen obraz čísla 3, nerovnost $x \le 3$ (číslo 3 patří mezi hledaná čísla) $\Rightarrow$ plným kolečkem označujeme obrazy čísel, která nerovnosti vyhovují.

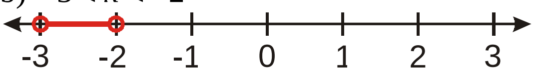
Prázdným kolečkem je označen obraz čísla -1, nerovnost $-1 < x$ (číslo -1 nepatří mezi hledaná čísla) $\Rightarrow$ prázdným kolečkem označujeme obrazy čísel, která nerovnosti nevyhovují.

Př. 7: Na číselné ose vyznač všechna reálná čísla *x*, pro která platí:
a) $0 \le x \le 2$ b) $-3 < x < -2$ c) $x > 2$ d) $x \le 3$

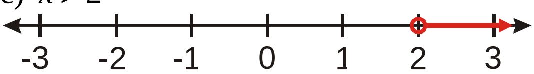
a) $0 \le x \le 2$



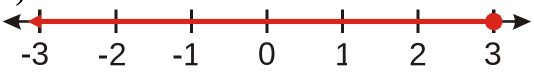
b) $-3 < x < -2$



c) $x > 2$



d) $x \leq 3$

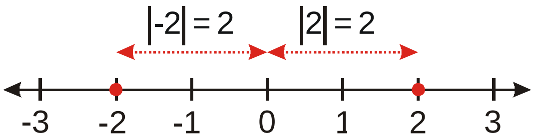


Pedagogická poznámka: Kromě procvičení orientace na číselné ose je cílem příkladu sjednocení grafického vyjádření.

Geometrická interpretace absolutní hodnoty:

$|2| = |-2| = 2$

Co mají 2 a –2 stejné? Vzdálenost od nuly.

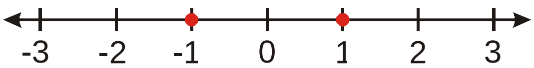


$\Rightarrow$ **Absolutní hodnota se rovná vzdálenosti obrazu čísla na číselné ose od počátku** (proto je vždy nezáporná a shodná pro navzájem opačná čísla).

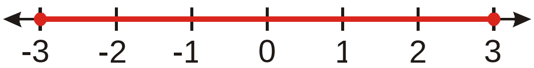
Pedagogická poznámka: Někdy žáci geometrickou interpretaci navrhnou místo definice absolutní hodnoty, takže si pak můžete ušetřit zdůvodňování.

Př. 8: Na číselné ose znázorni všechna reálná čísla, pro něž platí:
a) $|x| = 1$, b) $|x| \leq 3$, c) $|x| > 2$, d) $|x| \geq 1{,}5$, e) $|x| < 4$, f) $|x| \leq -1$.

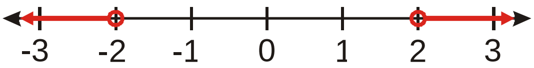
a) $|x| = 1 \Rightarrow$ hledáme čísla, která jsou vzdálena od nuly o jedničku.



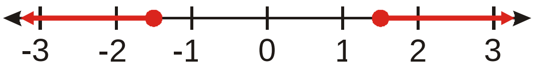
b) $|x| \leq 3 \Rightarrow$ hledáme čísla, která jsou vzdálena od nuly o tři nebo méně.



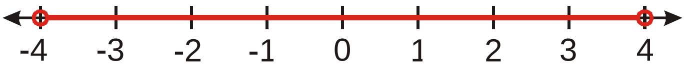
c) $|x| > 2 \Rightarrow$ hledáme čísla, která jsou vzdálena od nuly více než o dva.



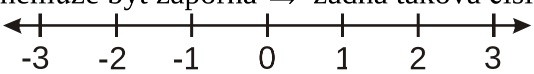
d) $|x| \geq 1{,}5 \Rightarrow$ hledáme čísla, která jsou vzdálena od nuly o jeden a půl nebo více.



e) $|x| < 4 \Rightarrow$ hledáme čísla, která jsou vzdálena od nuly méně než o čtyři.



f) $|x| \leq -1 \Rightarrow$ hledáme čísla, která jsou vzdálena o mínus jedna nebo méně $\Rightarrow$ vzdálenost nemůže být záporná $\Rightarrow$ žádná taková čísla nejsou.



Prázdné kolečko znamená, že číslo v něm nepatří mezi čísla, která jsme hledali.

Pedagogická poznámka: Hlavně slabší žáci by si měli psát slovní popis čísel, která hledají.

Pedagogická poznámka: Příkladů je více, aby si na něj žáci zvykli, a nebrzdilo je v řešení těžších úloh.

Shrnutí: Absolutní hodnota mění své chování podle toho, jaké je znaménko čísla, které obsahuje.